ریاضی ۱

(پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. مخرج کسر $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$ را گویا کنید.

۲. معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-(5-\sqrt{5})x-4-\sqrt{5}=0$ را حل کنید.

۳. با فرض $x>4$ و $k=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})=0$، حاصل $(k+k^{-1})^{-1}$ را برحسب x به‌دست آورید.

۴. اگر $y=x+\frac{1}{x}$ باشد و $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$، در این صورت مقدار عددی y را به‌دست آورید.

۵. اگر رأس سهمی $y=ax^2+2ax-3$ روی نیم‌ساز ناحیهٔ اول و سوم (خط y=x) قرار داشته باشد، مقدار a را به‌دست آورید.

۶. اگر $\dfrac{-a^2x^2+(a^2-8)x-12}{ax^2+bx+c}\geq 0$ در مجموعهٔ عددهای حقیقی تنها به ازای $(1,2)\cup[-4,-3]$ برقرار باشد، حاصل a+b+c را به دست آورید.

۷. عبارت $x^2+4y^2-5x+10y-4xy-24$ را تجزیه کنید.

۸. اگر $2f(x+2)+f(1-x)=2x-1$ و f تابع خطی باشد، در این‌صورت معادلهٔ این تابع خطی را به‌دست آورید.

حسابان ۱

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. هرگاه دامنهٔ تابع f بازهٔ $[0,1]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=f(\frac{[x]}{x})$ را بیابید.

۲. طول خط شکستهٔ $y=|x-1|-|x-2|$ را در بازهٔ $[-3,3]$ به‌دست آورید.

۳. تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+a & x\geq 0 \\ x+5 & x<0 \end{cases}$ مفروض است. به ازای چه مقادیری از عددهای طبیعی a، تابع f یک به یک نیست؟

۴. نمودار تابع $f(x)=\left[\dfrac{[x]+2}{4}\right]$ را در بازهٔ $[-5,4]$ رسم کنید.

۵. اگر $f(\sin x)=\tan 2x$ باشد، $f(\cos x)$ را به‌دست آورید.

۶. معادلهٔ $(\sqrt{x})^{-1+\log_3^x}=3$ را حل کنید.

۷. به روش هندسی نشان دهید، معادلهٔ $x\times 2^x=1$ فقط یک جواب مثبت دارد.

۸. اگر θ زاویه‌ای در موقعیت استاندارد و $p=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ انتهای کمان متناظر آن باشد، اندازهٔ زاویهٔ θ بر حسب رادیان چقدر است؟

حسابان ۲

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

آزادبه حسین فرزان

۱. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|x^۲-۴x|(x^۲-۱)}$، در چند نقطه از دامنه تعریفش فاقد حد است؟

۲. ضابطهٔ تابع g را به‌گونه‌ای مشخص کنید که در تابع با ضابطهٔ $f(x)=g(x).[x]$:

الف. تابع در $x=۱$ حد داشته باشد.

ب. تابع در $x=۱$ و $x=۲$ حد داشته باشد.

ج. تابع در $x=۱$ ، $x=۲$ و $x=۳$ حد داشته باشد.

آیا می‌توان از سه مثال فوق نتیجهٔ کلی‌تری گرفت؟ ضابطهٔ g را می‌توانید به‌گونه‌ای انتخاب کنید که تابع f در تمام نقاط حقیقی R، حد داشته باشد؟

۳. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف. $\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)}=$

ب. $\lim_{x\to +\infty}\frac{۲^{۳-n}+۵^{۱-n}}{۲^{۱-۲n}+۲^{۱-n}}$

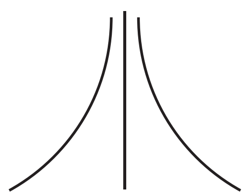
۴. با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$، حاصل حدهای زیر را مشخص کنید:

الف. $\lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=$

ب. $\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=$

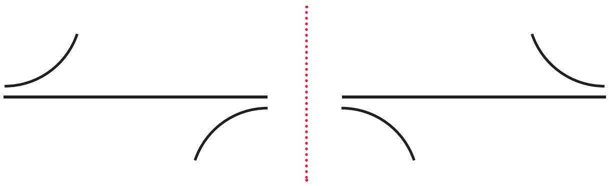
ج. $\lim_{x\to ۵}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=$

۵. اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x^۲+۴ax+b}$ در همسایگی مجانب قائمش به‌صورت زیر باشد، مقادیر a و b را مشخص کنید.



$x=۲$

۶. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲x^۲-x+۱}{x^۲+x+۱}$ در اطراف مجانب افقی تابع به کدام یک از شکل‌های زیر است؟



۷. اگر x=a مجانب قائم تابع کسری y=f(x) باشد، آیا x=a می‌تواند در دامنهٔ تابع قرار داشته باشد؟

هندسهٔ ۳

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حسین کریمی

۱. در مثلث ABC داریم: $BC=۶$ و $\frac{AB}{AC}=۲$ مکان هندسی رأس A را بیابید.

۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دو نیم‌ساز ربع اول و دوم مماس باشد و از نقطهٔ $M(\sqrt{۷},۳)$ بگذرد.

۳. معادلهٔ دایره‌های محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC را بنویسید که در آن داریم: $A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right.$

۴. از کانون $F\left|\begin{matrix}۹\\۰\end{matrix}\right.$ نوری به نقطهٔ $M(\frac{۲۶}{۳},\frac{۴\sqrt{۱۴}}{۳})$ واقع بر بیضی می‌تابد. اگر شعاع بازتابش از کانون $F'\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ بگذرد، معادلهٔ خط مماس بر بیضی در نقطهٔ M را بنویسید.

۵. خط d و نقطهٔ F به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از آن واقع است. مکان هندسی نقاطی از صفحه را مشخص کنید که فاصلهٔ آن نقاط از خط d همیشه ۲ سانتی‌متر بیشتر از فاصلهٔ آن نقاط تا F باشد.

۶. از کانون سهمی به معادلهٔ $y^۲=۴x-۴$ نوری که با محور تقارن سهمی زاویهٔ ۴۵° می‌سازد، می‌تابد و سهمی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. معادلهٔ شعاع بازتابش نور را بنویسید.

ریاضیات گسسته

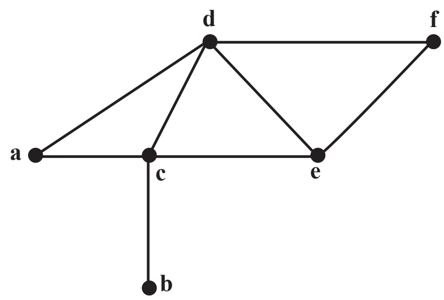
(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. نمودار گراف $G(V,E)$ را با $V=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E=\{\{x,y\}|xy=۵k\}$ رسم کنید.

۲. اگر اندازهٔ گراف G از ۶ برابر مرتبهٔ آن ۲۰ واحد کمتر باشد و G گرافی ۴- منتظم باشد، مجموع مرتبه و اندازهٔ گراف را به دست آورید.

۳. با توجه به گراف شکل ۱، طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را کامل کنید. (p مرتبه و q اندازهٔ گراف است).



شکل ۱

I) $N_G[a]=$

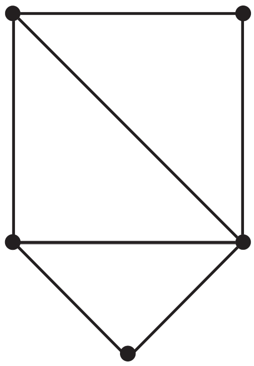
II) $N_G[c]=$

III) $N_G[d]=$

IV) $N_G[b]=$

V) $\Delta-\delta=$

۴. در گراف شکل ۲ چند دور متمایز وجود دارد؟



شکل ۲

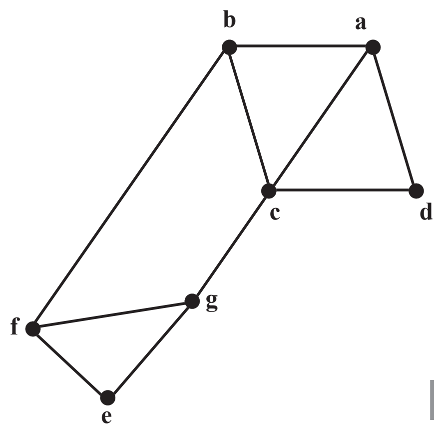
۵. گراف G از مرتبهٔ ۹ ناهم‌بند و ۲- منتظم است. این گراف چند دور دارد؟

۶. گراف G مطابق شکل ۳ مفروض است:

الف. دو مجموعهٔ احاطه‌گر برای G بنویسید.

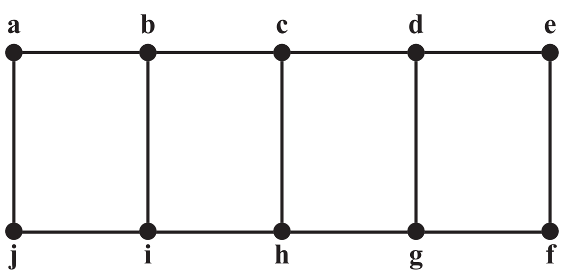
ب. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای G بنویسید.

پ. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای G بنویسید که مینیمم نباشد.



شکل ۳

۷. عدد احاطه‌گری گراف شکل ۴ را بیابید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و غیرمینیمم برای آن تعریف کنید.



شکل ۴

ریاضی ۱

۱.

$$\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{1}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{5})}\times\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\left[(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\right]\left[(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2\right]}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(3+2\sqrt{2}-3)(2-5)}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3\times 2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-12}$$

۲.

$$x^2-(5-\sqrt{5})x-4-\sqrt{5}=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-(5-\sqrt{5})\\ c=-4-\sqrt{5}\end{cases}$$

ابتدا Δ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=(5-\sqrt{5})^2-4(1)(-4-\sqrt{5})$$
$$=25+5-10\sqrt{5}+16+4\sqrt{5}$$
$$\Delta=46-6\sqrt{5}\Rightarrow$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{46-6\sqrt{5}}=\sqrt{(3\sqrt{5}-1)^2}=3\sqrt{5}-1$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{5-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-1}{2(1)}\\[2mm] x_2=\dfrac{5-\sqrt{5}-3\sqrt{5}+1}{2(1)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{4+2\sqrt{5}}{2}=\\[2mm] x_2=\dfrac{6-4\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2+\sqrt{5}\\ x_2=3-2\sqrt{5}\end{cases}$$

۳.

$$k=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{[x-(x-4)]}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}$$
$$k=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}\Rightarrow$$
$$k=\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{k}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}{2}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$(k+k^{-1})^{-1}=(k+\frac{1}{k})^{-1}=\left[\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}{2}\right]^{-1}$$
$$=(\frac{2\sqrt{x}}{2})^{-1}=(\sqrt{x})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

۴.

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=0\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{0\neq x^2}$$
$$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}-4=0\qquad(1)$$

به کمک اتحاد فرعی $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$، حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ به دست می‌آید. بنابراین در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$(x+\frac{1}{x})^2-2+x+\frac{1}{x}-4=0$$
$$\Rightarrow(x+\frac{1}{x})^2+(x+\frac{1}{x})-6=0$$

چون: $y=x+\frac{1}{x}$، بنابراین: $y^2+y-6=0\Rightarrow(y+3)(y-2)=0$ که در نتیجه $y=2$ و $y=-3$ به‌دست می‌آید.

۵. می‌دانیم طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. در نتیجه:

$$y=ax^2+2ax-3\left|\begin{array}{l}a=a\\ b=2a\\ c=-3\end{array}\right.\qquad x=\frac{-2a}{2a}=-1$$

طول رأس سهمی x=-۱ در سهمی قرار می‌دهیم تا عرض آن به‌دست آید:

$$y=ax^2+2ax-3 \xrightarrow{x=-1} y=a-2a-3 \Rightarrow y=-a-3$$

پس رأس سهمی S(-۱ و -a-۳) است و باید آن را در خط y=x قرار دهیم:

$$-a-3=-1 \to a=-2$$

۶. چون عبارت در ازای $[-4,-3]\cup(1,2)$ مثبت است، بنابراین تعیین علامت آن به‌صورت

		-4		-3		1		2	
P	−		+		−		+		−

است و معادلهٔ $-a^2x^2+(a^2-8)x-12=0$ به ازای x=-۳ و x=-۴ برقرار است. بنابراین:

$$x=-3 \Rightarrow -9a^2-3a^2+24-12=0$$
$$\to -12a^2+12=0 \to a^2=1 \to a=\pm1$$

با توجه به عبارت a=۱ برقرار است. در ضمن در مخرج کسر، $ax^2+bx+c=0$ به ازای x=۱ و x=۲ برقرار است. بنابراین:

$$x^2+bx+c=0\begin{cases}x=1 & 1+b+c=0\\ x=2 & 4+2b+c=0\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}b+c=-1\\ 2b+c=-4\end{cases}$$

که از آنجا داریم: b=-۳ و c=۲. پس حاصل $a+b+c=1+2-3=0$ است.

۷. ابتدا عبارت را برحسب x از توان بزرگ‌تر به کوچک‌تر مرتب می‌کنیم؛ همانند معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$x^2-x(4y+5)+4y^2+10y-24$$

حال می‌خواهیم عبارت $4y^2+10y-24$ را تجزیه کنیم. ابتدا دو عبارت که ضرب آن‌ها $4y^2$ می‌شود، پیدا می‌کنیم: $(4y\times y)$ یا $(2y\times 2y)$.

بعد دو عدد که حاصل‌ضرب آن‌ها -۲۴ شود؛ (-8×3) یا (-4×6) و ... سپس آن‌ها را به صورت دو سطر به شکل $\begin{matrix}2y & 2y\\ -3 & 8\end{matrix}$ می‌نویسیم و ستونی آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم، به طوری‌که حاصل جمع آن‌ها جمع وسط یعنی 10y بشود:

$$\begin{array}{cc}2y & 2y\\ -3 & 8\\ \hline \multicolumn{2}{c}{-6y+16y=10y}\end{array}$$

اگر نشود: به‌جای (-3×8) و یا $(2y\times 2y)$، عبارت دیگر را چک می‌کنیم. حال

$$\begin{array}{cc}2y & 2y\\ -3 & 8\\ \hline \multicolumn{2}{c}{-6y+16y=10y}\end{array}$$

به صورت $4y^2+10y-24=(2y+8)(2y-3)$ به دست می‌آید و آن را در عبارت اول قرار می‌دهیم:

$$x^2-x(4y+5)+(2y+8)(2y-3)$$

حالا دو عبارت باید پیدا کنیم که جمع آن‌ها $-(4y+5)$ و ضرب آن‌ها $(2y+8)(2y-3)$ شود. واضح است که:

$$x^2-x(4y+5)+(2y-3)(2y+8)$$
$$=(x-(2y-3))(x-(2y+8))$$
$$=(x-2y+3)(x-2y-8)$$

۸. تابع خطی به این صورت است: $f(x)=ax+b$. بنابراین:

$$f(x+2)=a(x+2)+b=ax+2a+b$$
$$f(1-x)=a(1-x)+b=a-ax+b$$

- اگر آن را در رابطهٔ $2f(x+2)+f(1-x)=2x-1$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2(ax+2a+b)+a-ax+b=2x-1\Rightarrow$$
$$2ax+4a+2b+a-ax+b=2x-1$$

که پس از ساده کردن داریم:

$$ax+5a+3b=2x-1$$

از آنجا ضریب x از یک طرف با ضریب x در طرف دیگر و همین‌طور مقادیر ثابت دو طرف با یکدیگر برابرند، پس:

$$a=2$$
$$5a+3b=-1\xrightarrow{a=2} b=\frac{-11}{3}$$

در نتیجه:

$$f(x)=2x-\frac{11}{3}$$

حسابان ۱

۱. فرض کنیم: $h(x)=\frac{[x]}{x}$ واضح است که: $D_h=\mathbb{R}-\{0\}$. پس دامنهٔ تابع $g=foh$ برابر است با:

$$D_g=\{x|x\in D_h|\ h(x)\in D_f\}$$
$$D_g=\left\{x|x\in\mathbb{R}-\{0\}|\ 0<\frac{[x]}{x}\le 1\right\}$$

اگر: $x<0$، آن‌گاه: $\frac{[x]}{x}\ge 1$ که فقط $\frac{[x]}{x}=1$ قابل قبول است.

پس: $x\in\overline{\mathbb{Z}}$ ($\overline{\mathbb{Z}}$ مجموعه عددهای صحیح منفی است)

اگر: $0<x<1$، آن‌گاه: $\frac{[x]}{x}=0$ که قابل قبول نیست.

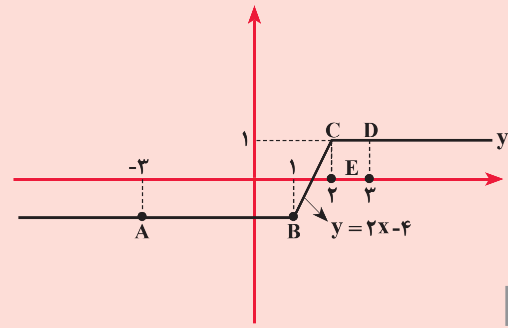
اگر: $x\ge 1$، آن‌گاه: $x-[x]<[x]$. پس: $x<2[x]$. یعنی: $\frac{[x]}{x}>\frac{1}{2}$.

از طرف دیگر: $\frac{[x]}{x}<1$. در نتیجه: $\frac{1}{2}<\frac{[x]}{x}<1$ که تمام عددهای حقیقی بزرگ‌تر مساوی یک مورد قبول هستند.

پس:

$$D_g=(۱,+\infty)\cup\{x\,|\,x\in\bar{x}\}$$

۲. نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-|x-۲|$ را رسم می‌کنیم (نمودار ۱).



نمودار ۱

مطابق شکل باید طول خط شکسته ABCD را به‌دست آوریم.

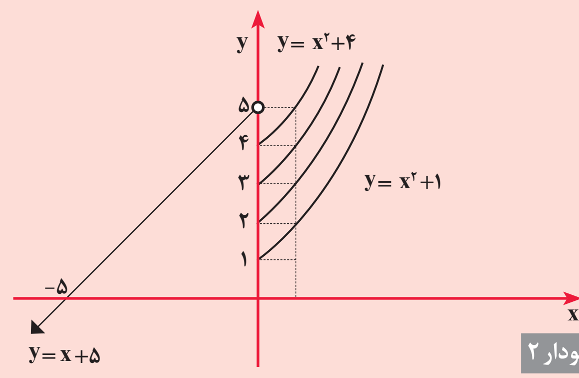
$$\begin{cases} \text{طول } AB=۴ \\ \text{طول } BC=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵} \\ \text{طول } CD=۱ \end{cases}$$

$$\text{طول خط شکسته } ABCD=۴+\sqrt{۵}+۱=۵+\sqrt{۵}$$

۳. چـون $a\in\mathbb{N}$ نمودارهـای $y=x^۲+۳$ ، $y=x^۲+۱$ ، $y=x^۲+۲$ و $y=x^۲+۴$ را رسم می‌کنیم (نمودار ۲)؛ ملاحظه می‌شود که خطوط افقی نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند.

پس f یک به یک نیست.

بنابراین به ازای $a=۱,۲,۳,۴$ ، تابع f یک به یک نیست.



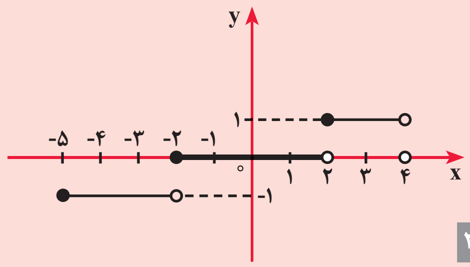
نمودار ۲

۴. اگر $-۵\le x<-۲$ ، آن‌گاه: $\left[\frac{[x]+۲}{۴}\right]=-۱$. پس: $f(x)=-۱$.

اگر: $-۲\le x<۲$ ، آن‌گاه: $\left[\frac{[x]+۲}{۴}\right]=۰$. پس: $f(x)=۰$.

اگر: $۲\le x<۴$ ، آن‌گاه: $\left[\frac{[x]+۲}{۴}\right]=۱$. پس: $f(x)=۱$.

نمودار تابع به صورت نمودار ۳ است:



نمودار ۳

۵. می‌دانیـــم به‌جای متغیر تابع، هر مقدار دلخواهی از دامنهٔ آن را می‌توان قرار داد. در تابع مذکور به جای x مقدار $\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)$ را قرار می‌دهیم:

$$f\left(\sin\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)\right)=\tan\left(۲\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)\right)$$

$$f(\cos x)=\tan(\pi-۲x)$$

$$f(\cos x)=-\tan ۲x$$

۶.

$$\left(-۱+\log_۳^x\right)\log_۳^{\sqrt{x}}=\log_۳^۳$$

$$\frac{۱}{۲}(-۱+\log_۳^x)\log_۳^x=۱$$

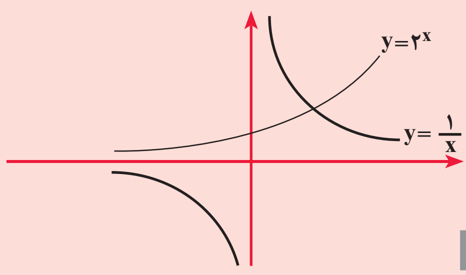
$$(\log_۳^x)^۲-\log_۳^x-۲=۰$$

$$(\log_۳^x-۲)(\log_۳^x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\log_۳^x=۲\Rightarrow x=۹\\ \log_۳^x=-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

۷. توابع $y=۲^x$ ، $y=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شـــکل واضح است، شـــاخه مثبت $y=\frac{۱}{x}$ ، نمودار تابع $y=۲^x$ را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار ۴

تذکر: *می‌توانستیم توابع $y=x$ ، $y=۲^{-x}$ را نیز رسم کنیم و نشان دهیم نمودار این دو تابع در یک نقطه در ناحیهٔ اول همدیگر را قطع می‌کنند.*

۸. چـــون طول نقطهٔ p منفی و عرض آن مثبت اســـت، پس در ربع دوم قرار دارد و:

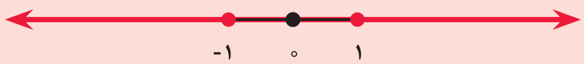
$$\cos\theta=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$$

حسابان ۲

۱. ابتدا دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|x^2-4x|(x^2-1)}$ را مشخص می‌کنیم:

$$|x^2-4x|(x^2-1)\geq 0 \xrightarrow[\text{همواره نامنفی است و تنها باید ریشه‌های آن را در نظر گرفت}]{|x^2-4x|} \begin{cases} x^2-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \ \text{یا}\ x\leq -1 \\ |x^2-4x|=0 \Rightarrow x=0 \ \text{و}\ x=4 \end{cases}$$



بــا توجه به آنکه شــرط لازم برای وجود حد تابــع در $x=a$، وجود همســایگی راســت و چپ $x=a$ در دامنهٔ تابع است، بنابراین تابع در سه نقطــه به طول‌های $x=1$، $x=-1$ و $x=0$ فاقد حد اســت، زیرا به‌ترتیب همسایگی چپ، همسایگی راست و همسایگی این نقاط در دامنهٔ تابع قرار ندارند؛ هر چند این نقاط عضو دامنهٔ تابع هستند.

۲. در تابــع $f(x)=g(x)\times[x]$، با توجه به آنکه: $y=[x]$ در نقاط صحیح حد ندارد (حد راست و حد چپ تابع در تمام نقاط صحیح متفاوت است).
برای قسمت الف: اگر y تابعی باشد که در $x=1$ حد داشته باشد و مقدار آن برابر صفر باشد، مانند $g(x)=x-1$:

$$f(x)=(x-1)[x]$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \text{حد راست} = 0\times 1 = 0 \\ \text{حد چپ} = 0\times 0 = 0 \end{cases}$$

تابع در $x=1$ حد دارد.

اما این تابع در نقاط دیگر حد ندارد، زیرا:

$$\lim_{\substack{x\to k \\ k\in Z}} (x-1)[x] = \begin{cases} \text{حد راست} = (k-1)k \\ \text{حد چپ} = (k-1)(k-1) \end{cases}$$

$$\text{حد راست} = \text{حد چپ} \Rightarrow (k-1)k=(k-1)(k-1) \begin{cases} k=1 \ \text{قبلاً بررسی شد} \\ k=k-1 \quad \times \end{cases}$$

براساس مطالب فوق:
ب) $y=(x-1)(x-2)[x]$ و **ج)** $y=(x-1)(x-2)(x-3)[x]$
به ترتیب در نقاط خواسته شده حد دارند.

۳.

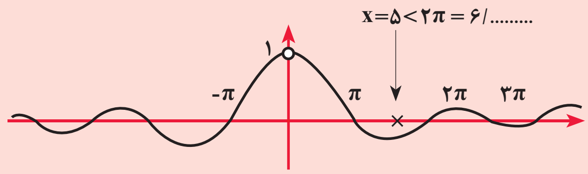
الف)
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{(x-1)}^{1}\overbrace{(x-1)}^{2}}{\sqrt{x}-1\times\sqrt[3]{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}^{1}\overbrace{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}^{2}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=2\times 3=6$$

ب)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2^{3-n}+5^{1-n}}{2^{1-2n}+2^{1-n}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n\times 8+(\frac{1}{5})^n\times 5}{(\frac{1}{4})^n\times 2+2\times(\frac{1}{2})^n}=\frac{8\times(\frac{1}{2})^n}{2\times(\frac{1}{2})^n}=4$$

۴. با توجه به نمودار تابع:



الف) نمودار تابع در همســایگی صفــر از مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\left[1^-\right]=0$$

ب) با توجه به نوسانی بودن نمودار تابع و منفی و مثبت شدن آن، حاصل حد از این قرار است:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right] \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

و تابع در $+\infty$ حد ندارد.

ج) با توجه به نمودار تابع و $x=5<2\pi=6/000$ حاصل می‌شود:

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=[A]=-1$$

$$-1<A<0$$

۵. با توجه به نمودار داده شده داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2+4ax+b}=+\infty$$

با توجه به علامت + در صورت کسر و آنکه حد راست و حد چپ تابع در x=۲ برابر $+\infty$ است، x=۲ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است:

$$x^2+4ax+b=(x+2)^2=x^2+4x+4$$

$$\to 4x=4 \to x=1$$

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)^2} \qquad \lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$$

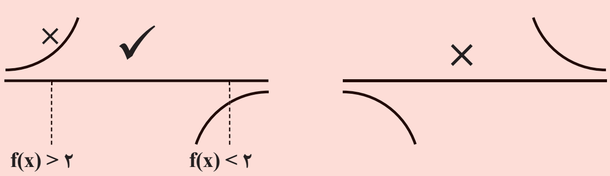
۶.

$$f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x^2+x+1}=2+\frac{-3x-1}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} 2+\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty} 2-\frac{3}{x}$$

$$\begin{cases} x\to +\infty \\ f(x)<2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to -\infty \\ f(x)>2 \end{cases}$$

پس نمودار تابع در اطراف مجانب افقی به‌صورت زیر است:



۷. اگرچه در نگاه اول به نظر می‌رسد که x=a نباید در دامنهٔ تابع باشد، اما با توجه به تعریف مجانب قائم $\begin{cases} x \to a \\ f(x) \to \pm\infty \end{cases}$ و آنکه حد تابع در x=a ارتباطی به مقدار تابع در $x = a$ ندارد، $x = a$ می‌تواند در دامنهٔ تابع قرار داشته باشد.

مثال) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۵ & x = ۰ \end{cases}$

در تابع فوق داریم: $x = ۰ \in D_f$ و در واقع: $D_f = R$ اما: $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = \pm\infty$

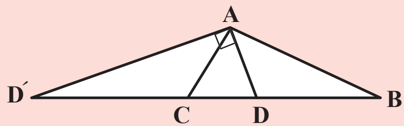
$x=۰$ مجانب قائم تابع است.

هندسهٔ ۳

۱. فرض کنیم مثلث ABC را داشته باشیم و AD نیم‌ساز داخلی و AD' نیم‌ساز خارجی باشد.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = ۲$$

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} = ۲$$

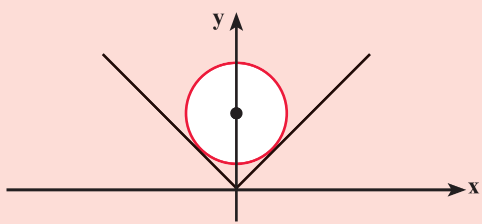


پس نقطهٔ D را روی $BC\ (CD = ۲, DB = ۴)$

و نقطهٔ D' را در امتداد $BC\ (D'C = ۶, D'B = ۱۲)$ در نظر می‌گیریم.

چون: $AD \perp AD'$، پس مکان هندسی A دایره‌ای است به قطر DD' (به جز نقاط D و D').

۲.



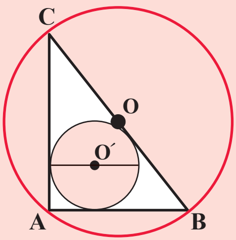
$$C : X^۲ + (y - R\sqrt{۲})^۲ = R^۲$$

$$M(\sqrt{۷}, ۳) \in C \Rightarrow ۷ + (۳ - R\sqrt{۲})^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۶\sqrt{۲}R + ۱۶ = ۰ \Rightarrow R = ۴\sqrt{۲} \text{ یا } ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_۱ : x^۲ + y^۲ - ۱۶y + ۳۲ = ۰ \\ C_۲ : x^۲ + y^۲ - ۸y + ۸ = ۰ \end{cases}$$

۳. توجه داریم که مثلث ABC قائم‌الزاویه است



$$\text{مرکز دایرهٔ محیطی} = O \left| \begin{matrix} \frac{۳}{۲} \\ \frac{۴}{۲} \end{matrix} \right. \text{ وسط } BC$$

$$\text{شعاع دایرهٔ محیطی} = R = \frac{BC}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

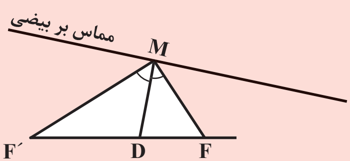
$$\text{دایرهٔ محیطی} : (x - \frac{۳}{۲})^۲ + (y - ۲)^۲ = \frac{۲۵}{۴}$$

$$\text{دایرهٔ محیطی} : x^۲ + y^۲ - ۳x - ۴y = ۰$$

$$\text{شعاع دایرهٔ محاطی} = r = \frac{s}{p} = \frac{\frac{۱}{۲}(۳ \times ۴)}{\frac{۱}{۲}(۳ + ۴ + ۵)} = ۱ \Rightarrow o' \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$

$$\text{دایرهٔ محاطی داخلی} : (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ + ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y + ۱ = ۰$$

۴.



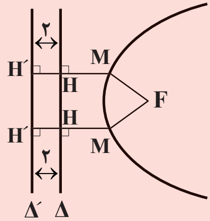
$$FM = \sqrt{\frac{۱}{۹} + \frac{۲۲۴}{۹}} = ۵ \qquad F'M = \sqrt{\frac{۶۷۶}{۹} + \frac{۲۲۴}{۹}} = ۱۰$$

$$\text{نیم‌ساز داخلی} MD \Rightarrow \frac{DF'}{DF} = \frac{MF' = ۱۰}{MF = ۵} = ۲ \Rightarrow D(۶, ۰), m_{MD} = \frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$$

$$F'\hat{M}F \text{ نیم‌ساز خارجی} = M \text{ معادلهٔ مماس بر بیضی در نقطهٔ} : y - y_M = \frac{-۲}{\sqrt{۱۴}}(x - x_M)$$

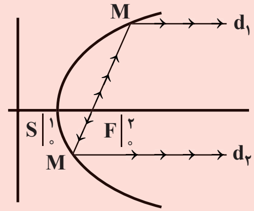
$$M \text{ معادلهٔ مماس بر بیضی در نقطهٔ} : ۲x + \sqrt{۱۴}y - ۳۶ = ۰$$

۵. مکان، یک سهمی است به کانون F و به خط هادی Δ که در آن Δ به موازات خط d و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری از d قرار دارد.



$$M \in \text{سهمی} \Rightarrow MH = MF$$
$$\Rightarrow MH' - ۲ = MF$$

۶. $y^۲ = ۴x - ۴ \Rightarrow y^۲ = ۴(x-۱)$

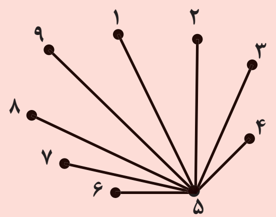


$$M:\begin{cases} \text{معادلهٔ سهمی}: y^۲ = ۴(x-۱) \\ \text{معادلهٔ تابش}: y = x - ۲ \end{cases} \Rightarrow y^۲ - ۴y - ۴ = ۰$$
$$\Rightarrow y_M = ۲ \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases} d_۱ : y = ۳\sqrt{۲} \\ d_۲ : y = -\sqrt{۲} \end{cases}$$

ریاضیات گسسته

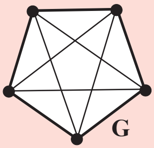
۱. با توجه به تعریف E داریم:

$$E = \{\{۱,۵\},\{۲,۵\},\{۳,۵\},\{۴,۵\},\{۶,۵\}, \{۷,۵\},\{۸,۵\},\{۹,۵\}\}$$



۲. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} q = ۶p - ۲۰ \\ ۴p = ۲q \Rightarrow q = ۲p \Rightarrow ۳q = ۶p \Rightarrow \end{cases}$$
$$\Rightarrow q = ۳q - ۲۰ \Rightarrow ۲q = ۲۰ \Rightarrow q = ۱۰$$
$$\Rightarrow p = ۵ \Rightarrow p + q = ۱۵ \rightarrow$$



۳. با توجه به گراف داده شده داریم:

I) $N_G[a] = \{a, d, c\}$

II) $N_G(c) = \{a, b, e\}$

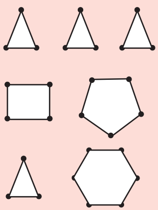
III) $N_G[d] = \{d, f, e, c, a\}$

IV) $N_G(b) = \{c\}$, $\Delta - \delta = ۴ - ۱ = ۳$

۴. با توجه به گراف داده شده داریم:

تعداد دورها برابر است با مجموع دورهای به طول ۳، ۴ و ۵ (در صورت وجود) که در این گراف سه دور به طول ۳، دو دور به طول ۴، یک دور به طول ۵ و مجموعاً ۶=۱+۲+۳ دور وجود دارد.

۵. گراف G به صورت‌های زیر رسم می‌شود:



I) = سه دور به طول ۳

II) = دو دور به طول‌های ۴ و ۵

III) = دو دور به طول‌های ۳ و ۶

۶. با توجه به گراف داده شده داریم:

الف) $D_۱ = \{b, c, e\}, D_۲ = \{c, e\}$ (دو مجموعهٔ احاطه‌گر)

ب) $D = \{c, f\}$ (احاطه‌گر مینیمم)

پ) $D = \{e, b, d\}$ (احاطه‌گر مینیمال و غیرمینیمم)

۷.
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil = ۳$$

از طرف دیگر، چون $D = \{a, h, e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس: $\gamma(G) = ۳$ و مجموعهٔ $K = \{a, j, d, y\}$ احاطه‌گر مینیمال و غیرمینیمم است.